

# Dekompozycja sygnału EKG w bazach falkowych z wykorzystaniem algorytmu Mallata

Urszula Libal<sup>1</sup>

**Streszczenie:** Statystyczna analiza elektrokardiogramu, jako sygnału losowego, jest trudna ze względu na jego niestacjonarność. Sygnał EKG można przedstawić w bazach funkcji falkowych w postaci ciągu współczynników. Taka reprezentacja sygnału pozwala na wykorzystanie algorytmu Mallata w celu dekompozycji sygnału EKG na składowe aproksymacyjne i składowe detali, które można poddać dalszej analizie.

**Słowa kluczowe:** analiza wielorozdzielcza, dekompozycja falkowa, bazy ortonormalne

## 1. Wprowadzenie

Przedstawienie sygnału w bazach falkowych pozwala na jego dekompozycję, a to z kolei – na stopniową analizę. Sygnał  $s(t)$  należący do przestrzeni  $L^2(\mathbb{R})$  funkcji całkowalnych z kwadratem (tj. o skończonej energii) można przedstawić w ortonormalnej bazie rodziny funkcji falkowych (indeksowanych przesunięciami w czasie). Taką reprezentację sygnału można następnie rekurencyjnie dekomponować i w ten sposób uwzględniać coraz bardziej subtelne szczegóły sygnału, co zaprezentowano w dalszej części artykułu. Tematykę falkowej dekompozycji poruszano w wielu pracach [5, 6, 7], w szczególności także dla falek Daubechies [2, 4]. Zdekomponowany sygnał w konkretnych zastosowaniach poddawano odzsumianiu i kompresji lub analizowano jego aproksymację oraz detale.

## 2. Falkowa reprezentacja sygnału w bazie ortonormalnej przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$

Niech rzeczywisty sygnał  $s(t)$  należy do przestrzeni Hilberta  $L^2(\mathbb{R})$  [1], [3], czyli przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem (albo przestrzeni sygnałów o skończonej energii). W nieskończonej wymiarowej przestrzeni  $L^2(\mathbb{R})$  istnieje baza ortonormalna, która rozpina całą przestrzeń i pozwala przedstawić dowolny sygnał  $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$  jednoznacznie (patrz twierdzenie Riesz o reprezentacji [8]). Takie przedstawienie sygnału jest dokładne, tzn. nie wprowadza żadnego błędu, jednak w praktycznych zastosowaniach zdefiniowanie odpowiedniej bazy ortonormalnej jest kłopotliwe ze względu na jej liczebność. W praktyce wygodnie jest ograniczyć liczbę elementów bazy tylko do tych składowych, które są niezbędne do właściwego przybliżenia sygnału. I tym samym aproksymować sygnał jego rzutami na podprzestrzeń  $V_m \subset L^2(\mathbb{R})$  rozpiętą przez funkcje bazowe  $\{\phi_{mn}(t) : n \in \mathbb{Z}\}$ . Rzut sygnału na podprzestrzeń aproksymacji  $V_m$  będziemy nazywać *aproksymatorem*  $s(t; m)$  sygnału dla skali  $m$ .

<sup>1</sup> Instytut Informatyki, Automatyki i Robotyki, Politechnika Wrocławska, ul. Janiszewskiego 11/17, 50-372 Wrocław, urszula.libal@pwr.wroc.pl

### 3. Analiza wielorozdzielcza

Niech *funkcja skalująca*  $\phi(t)$  oraz *falka-matka*  $\psi(t)$  będą funkcjami całkowalnymi z kwadratem oraz niech spełniają dodatkowo warunki  $\int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt = 1$  oraz  $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$ .

W analizie wielorozdzielczej (zwanej inaczej analizą wieloskalową) zaproponowanej przez Mallata [6], [7], a szczegółowo opisanej w [4], dowolny sygnał  $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$  można aproksymować z rosnącą rozdzielczością w dziedzinie czasu w następujący sposób

$$s(t; m) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{mn} \phi_{mn}(t) \in V_m, \quad (1)$$

gdzie funkcje bazowe podprzestrzeni  $V_m$  mają postać

$$\phi_{mn}(t) = 2^{m/2} \phi(2^m t - n), \quad (2)$$

natomiast współczynniki  $\alpha_{mn}$  dane są wzorem

$$\alpha_{mn} = \int_{\mathbb{R}} s(t) \phi_{mn}(t) dt. \quad (3)$$

Funkcje bazowe rozpinające podprzestrzeń  $V_m = \text{span}\{\phi_{mn}(t), n \in \mathbb{Z}\}$  otrzymujemy przez translacje w czasie i przeskalowanie wartości *funkcji skalującej*  $\phi(t)$ . Aproksymator  $s(t; m)$  jest rzutem ortogonalnym sygnału  $s(t)$  na odpowiednią podprzestrzeń  $V_m$ . W praktyce, ze względu na ograniczenia wynikające z cyfrowej reprezentacji sygnału, już na wstępie dysponujemy jedynie aproksymacją sygnału, ponieważ jest on spróbkowany z ustaloną częstotliwością. Wykorzystywane w konkretnych zastosowaniach *funkcja skalująca*  $\phi(t)$  i *falka-matka*  $\psi(t)$  często nie mają jawnej postaci, a są jedynie wyznaczone numerycznie (np. falki Daubechies [2]).

### 4. Rekurencyjna falkowa aproksymacja sygnału

Każdą przestrzeń  $V_m$  można przedstawić jako sumę prostą poprzedniej przestrzeni aproksymacyjnej  $V_{m-1}$  i uzupełniającej ją przestrzeni detali  $W_{m-1}$

$$V_m = V_{m-1} \oplus W_{m-1}. \quad (4)$$

Bazę ortonormalną podprzestrzeni  $W_{m-1} = \text{span}\{\psi_{m-1,n}(t), n \in \mathbb{Z}\}$  tworzą funkcje bazowe

$$\psi_{m-1,n}(t) = 2^{(m-1)/2} \psi(2^{m-1}t - n) \quad (5)$$

otrzymane dzięki przeskalowaniom i translacjom w czasie *falki-matki*  $\psi(t)$ . Z tej zależności wynika rekurencyjny wzór na aproksymator (za [4]) dla dowolnej skali  $m$

$$s(t; m) = s(t; m-1) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_{m-1,n} \psi_{m-1,n}(t), \quad (6)$$

gdzie współczynniki dane są wzorem

$$\beta_{m-1,n} = \int_{\mathbb{R}} s(t) \psi_{m-1,n}(t) dt. \quad (7)$$

Sygnał aproksymowany przez  $s(t; m-1) \in V_{m-1}$  dla skali  $m-1$ , wzbogacony o szczegóły wyizolowane dla przestrzeni detali  $W_{m-1}$ , składa się na nowy aproksymator  $s(t; m) \in V_m$  o dwukrotnie zwiększonej rozdzielczości (precyzji). Funkcje bazowe podprzestrzeni  $V_{m-1}$  i  $W_{m-1}$  są spłaszczone i rozciągnięte w czasie w porównaniu do funkcji bazowych  $V_m$ , co wynika z zależności (2) i (5).

## 5. Algorytm Mallata

Przedstawiona w poprzednim punkcie własność (4) rozbicia przestrzeni aproksymacji na przestrzeń aproksymacji o mniejszej rozdzielczości oraz przestrzeń detali została wykorzystana przez Mallata [7] do konstrukcji algorytmu wyznaczającego współczynniki rozwinięcia aproksymatora sygnału  $s(t; m)$  z przestrzeni  $V_m$  w bazach podprzestrzeni  $V_{m-1}$  i  $W_{m-1}$ . *Algorytm Mallata* rekurencyjnie dekomponuje sygnał  $s(t; m) \in V_m$  dla  $m = K, K-1, \dots, M+1$  na składowe:

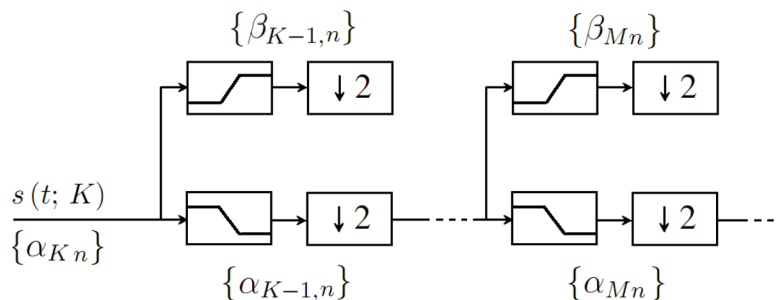
1. **aproksymacji**  $s(t; m-1) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{m-1,n} \phi_{m-1,n}(t) \in V_{m-1}$ ,
2. **detalu**  $detal(t; m-1) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_{m-1,n} \psi_{m-1,n}(t) \in W_{m-1}$

za pomocą **filtrów dolno- i górnoprzepustowych** odpowiednio. Na podstawie współczynników aproksymacji  $\{\alpha_{mn}\}$  wyznaczamy współczynniki  $\{\alpha_{m-1,n}\}$  i  $\{\beta_{m-1,n}\}$  następująco

1.  $\alpha_{m-1,n} = \sum_{t \in \mathbb{Z}} h_t \alpha_{m,t+2n}$ ,
2.  $\beta_{m-1,n} = \sum_{t \in \mathbb{Z}} g_t \alpha_{m,t+2n}$ ,

gdzie  $\{h_t\}$  to filtr dolnoprzepustowy, a  $\{g_t\}$  – górnoprzepustowy. W wyniku filtracji mniej dokładna aproksymacja sygnału i uzupełniająca ją detal zostały poddane **decymacji co drugiej próbki**.

Schemat metody opisanej przez Mallata przedstawiono na rys. 1.



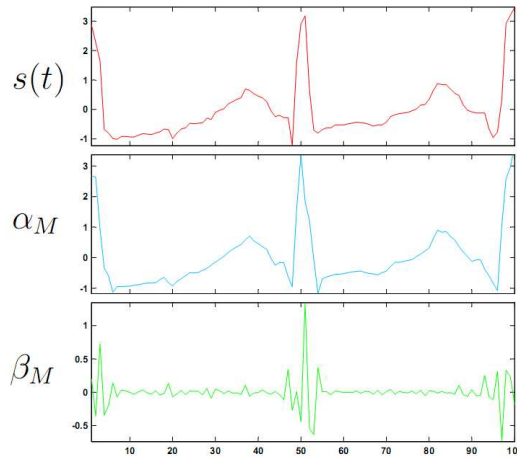
Rys. 1. Schemat blokowy algorytmu Mallata. Rekurencyjna dekompozycja aproksymatora  $s(t; K)$  sygnału dla skali  $K$ . Na kolejnych poziomach dekompozycji wyodrębniamy w wyniku **filtracji górnoprzepustowej** detale sygnału  $detal(t; m)$  oraz **dolnoprzepustowej** – zgrubny, wygładzony aproksymator  $s(t; m)$  sygnału dla mniejszych skal  $m = K-1, K-2, \dots, M$ .

## 6. Dekompozycja falkowa sygnału EKG

Zaimplementowano algorytm Mallata do falkowej dekompozycji elektrokardiogramu. Sygnał EKG został zdekomponowany na dwa ciągi współczynników falkowych

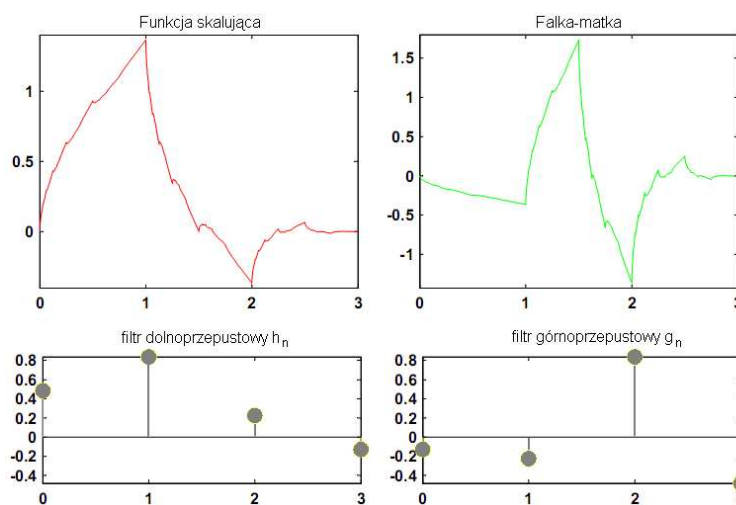
$$\begin{cases} \alpha_M = \{\alpha_{Mn_1}\}, & \text{dla } n_{\min}(D^p, a, M) \leq n_1 \leq n_{\max}(D^p, b, M), \\ \beta_M = \{\beta_{Mn_2}\}, & \text{dla } n_{\min}(d^p, a, M) \leq n_2 \leq n_{\max}(d^p, b, M). \end{cases} \quad (8)$$

Ilustrację dekompozycji sygnału zamieszczono na rys. 2.



Rys. 2: Jednopoziomowa dekompozycja sygnału dla skali  $M = -1$ .

Przyjęto, że pełna, końcowa, rzeczywista skala reprezentacji falkowej sygnału  $s(t)$  wynosi  $K = 0$ . Obliczono zarówno falkowe współczynniki aproksymacji  $\{\alpha_{Mn_1}\}$  oraz detalu  $\{\beta_{Mn_2}\}$  dla mniejszej skali  $M = -1$ . Sygnał EKG  $s(t)$  został przedstawiony w bazie falkowej 'db2' [2] Daubechies rzędu  $p = 2$ . Funkcję skalującą  $D^2$  oraz falkę-matkę  $d^2$  z rodziny 'db2' przedstawiono na rys. 3. Nośniki podstawowych funkcji falkowych  $D^2$  i  $d^2$  mają długość  $r = 2p - 1 = 3$ .



Rys. 3. Funkcja skalująca  $D^2$  i falka-matka  $d^2$  Daubechies rzędu 2 ('db2') oraz współczynniki filtra dolno- i górnoprzepustowego odpowiednio dla funkcji skalującej  $D^2$  i falki-matki  $d^2$ .

Dekompozycję sygnału EKG dla rodziny falek 'db2' przeprowadzono w trzech krokach:

1. **Wyznaczenie wartości współczynników filtra dolnoprzepustowego**  $\{h_n\}_{n=0}^r$  **oraz filtra górnoprzepustowego**  $\{g_n\}_{n=1-r}^1$ .

Wartości  $\{h_0, h_1, h_2, h_3\}$  zaczerpnięto z pracy [4]:

$$h_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}},$$

a wartości współczynników filtra górnoprzepustowego  $\{g_n\}_{n=1-r}^1$  wyznaczono z zależności  $g_n = (-1)^n h_{-n+1}$ :

$$g_{-2} = h_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad g_{-1} = -h_2 = \frac{-3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}},$$

$$g_0 = h_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad g_1 = -h_0 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.$$

2. **Wyznaczenie falkowych współczynników aproksymacji**  $\{\alpha_{Kn_0}\}$ , dla skali  $K = 0$ , będących reprezentacją sygnału EKG przy użyciu *modelu zagregowanego*:

$$s(t; K) = \sum_{n_0=n_{\min}(D^2, a, K)}^{n_{\max}(D^2, b, K)} \alpha_{K, n_0} D_{K, n_0}^2(t). \quad (9)$$

Wyznacza się je ze wzoru

$$\alpha_{K, n_0} = \int s(t) D_{K, n_0}^2(t) dt \quad (10)$$

$$\text{dla } n_{\min}(D^2, a, K) \leq n_0 \leq n_{\max}(D^2, b, K).$$

Dla sygnału  $s(t)$  o długości 100 (sygnał jest próbkowany  $t \in \{1, \dots, 100\}$  oraz  $a = 1$ ,  $b = 100$ ) granice wynoszą

$$n_{\min}(D^2, a, K) = \lceil 2^K a - r \rceil = -2,$$

$$n_{\max}(D^2, b, K) = \lfloor 2^K b \rfloor = 100,$$

czyli  $-2 \leq n_0 \leq 100$ .

3. W kolejnym kroku **korzystając z algorytmu Mallata** [5] (wersja dla falek o zwartym nośniku podana została w [4]) **wyznacza się falkowe współczynniki początkowej aproksymacji**  $\{\alpha_{Mn_1}\}$  **oraz detalu**  $\{\beta_{Mn_2}\}$  **w modelu zdekomponowanym** dla mniejszej skali  $M = K - 1 = -1$

$$s(t; K) = \sum_{n_1=n_{\min}(D^2, a, M)}^{n_{\max}(D^2, b, M)} \alpha_{M, n_1} D_{M, n_1}^2(t) + \sum_{n_2=n_{\min}(d^2, a, M)}^{n_{\max}(d^2, b, M)} \beta_{M, n_2} d_{M, n_2}^2(t) \quad (11)$$

w oparciu o wyznaczone w kroku drugim współczynniki  $\{\alpha_{Kn_0}\}$ .

Współczynniki obliczamy następująco:

$$\alpha_{Mn_1} = \sum_{n=0}^r h_n \alpha_{K, n+2n_1}, \quad (12)$$

$$\beta_{Mn_2} = \sum_{n=1-r}^1 g_n \alpha_{K, n+2n_2}, \quad (13)$$

gdzie  $-1 \leq n_1 \leq 49$  oraz  $0 \leq n_2 \leq 50$ , a filtry  $\{h_n\}_{n=0}^r$  i  $\{g_n\}_{n=1-r}^1$  zostały obliczone w kroku pierwszym.

## 7. Podsumowanie

W zaprezentowany sposób otrzymano dla sygnału EKG dwa 51-elementowe ciągi współczynników falkowych  $\{\alpha_{Mn_1}\}$  oraz  $\{\beta_{Mn_2}\}$ . Przedstawiona w artykule metoda dekompozycji sygnału EKG na dwa ciągi współczynników falkowych nie oddaje w pełni możliwości opisanego algorytmu. Warto podkreślić, że reprezentacja sygnału w bazach falkowych umożliwia jego rozbitcie na zgrubną aproksymację  $\{\alpha_{Kn}\}$  i ciąg detali  $\{\beta_{mn}\}$  dla różnych poziomów rozdzielczości  $m = K-1, K-2, \dots, M$ , które można poddać stopniowej analizie statystycznej. Analiza wielorozdzielcza sygnału w bazach falkowych oraz algorytm Mallata stanowią niezwykle pomocne narzędzie w szybkiej dekompozycji niestacjonarnych sygnałów losowych, jak np. elektrokardiogramy. Na metodzie zaprezentowanej przez Mallata opiera się tzw. szybka transformata falkowa (ang. *FWT - Fast Wavelet Transform*).

## Literatura

- [1] S. K. Berberian, *Introduction to Hilbert Space*, American Mathematical Society Bookstore, 1999
- [2] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM Edition, Philadelphia, 1992
- [3] P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, Springer-Verlag, New York, 1974
- [4] Z. Hasiewicz, P. Śliwiński, *Falki ortogonalne o zwartym nośniku. Zastosowanie do nieparametrycznej identyfikacji systemów*, Exit, Warszawa, 2005
- [5] S. G. Mallat, *A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 11, 674–693, 1989
- [6] S. G. Mallat, *Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of  $L^2(R)$* , Transaction of the American Mathematical Society, 315, 69–87, 1989
- [7] S. G. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*, Academic Press, San Diego, 1998
- [8] W. Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona*, PWN, Warszawa, 1998