1. Klasyfikator bayesowski

dr inż. Urszula Libal

Politechnika Wrocławska

2016

1. Pełna informacja probabilistyczna

Rozpoznawany obraz pochodzi z pewnej klasy ze zbioru wszystkich klas

$$\mathscr{M} = \{1, 2, \ldots, M\}\,. \tag{1}$$

Znane są prawdopodobieństwa *a priori* klas oraz funkcje gęstości prawdopodobieństwa w klasach:

klasa 1	klasa 2	$\cdots$	klasa M
p_1	p_2	$\cdots$	p_M
$f_1(x)$	$f_2(x)$	$\cdots$	$f_M(x)$

2. Zero-jedynkowa funkcja strat

Zero-jedynkowa funkcja strat $\mathscr{L}^{0-1}$ przyjmuje dwie wartości

$$\mathscr{L}^{0-1}(C,J) \quad = \quad \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad C = J, \\ 1 & \text{gdy} \quad C \neq J, \end{cases} \tag{2}$$

gdzie C to klasa, do której zaklasyfikowany został obraz pochodzący z klasy J.

3. Ryzyko dla 0-1 funkcji strat

Ryzyko algorytmu Ψ dla dowolnej funkcji strat $\mathscr{L}$ definiujemy następująco

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}[\Psi] &= \mathbb{E}\{\mathscr{L}(\Psi(X(\omega)), J(\omega))\} && (3)\\
&= \int_{\mathscr{X}} \sum_{j\in\mathscr{M}} \mathscr{L}(i, j)\, p_j f_j(x)\, dx && (4)\\
&= \sum_{j\in\mathscr{M}} p_j \sum_{i\in\mathscr{M}} \mathscr{L}(i, j) \int_{\mathscr{D}_{\mathscr{X}}^{(i)}} f_j(x)\, dx. && (5)
\end{aligned}$$

4. Problem klasyfikacji dla dwóch klas

Obszary decyzyjne to

$$\mathscr{D}_{\mathscr{X}}{}^{(1)} = \{x \in \mathscr{X} : \Psi(x) = 1\}, \tag{6}$$

$$\mathscr{D}_{\mathscr{X}}{}^{(2)} = \{x \in \mathscr{X} : \Psi(x) = 2\}, \tag{7}$$

takie, że

$$\mathscr{D}_{\mathscr{X}}{}^{(1)} \cup \mathscr{D}_{\mathscr{X}}{}^{(2)} = \mathscr{X}, \tag{8}$$

$$\mathscr{D}_{\mathscr{X}}{}^{(1)} \cap \mathscr{D}_{\mathscr{X}}{}^{(2)} = \emptyset. \tag{9}$$

W przypadku szczególnym, dla dwóch klas $\mathscr{M} = \{1, 2\}$ oraz dla 0-1 funkcji strat, ryzyko wynosi

$$\mathscr{R}[\Psi] = p_1 \mathscr{L}^{0-1}(1, 1) \int_{\mathscr{D}_{\mathscr{X}}{}^{(1)}} f_1(x)\,dx + p_1 \mathscr{L}^{0-1}(2, 1) \int_{\mathscr{D}_{\mathscr{X}}{}^{(2)}} f_1(x)\,dx \tag{10}$$

$$+ \; p_2 \mathscr{L}^{0-1}(1, 2) \int_{\mathscr{D}_{\mathscr{X}}{}^{(1)}} f_2(x)\,dx + p_2 \mathscr{L}^{0-1}(2, 2) \int_{\mathscr{D}_{\mathscr{X}}{}^{(2)}} f_2(x)\,dx. \tag{11}$$

Po uproszczeniu

$$\mathscr{R}[\Psi] = p_1 \int_{\mathscr{D}_{\mathscr{X}}{}^{(2)}} f_1(x)\,dx + p_2 \int_{\mathscr{D}_{\mathscr{X}}{}^{(1)}} f_2(x)\,dx. \tag{12}$$

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa cech pochodzących z obu klas $\{1, 2\}$ to mieszanina gęstości prawdopodobieństw cech w klasach

$$f(x) = p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x). \tag{13}$$

Przekształcamy wzór (12)

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}[\Psi] &= p_1 \int_{\mathscr{X} \setminus \mathscr{D}_{\mathscr{X}}{}^{(1)}} f_1(x)\, dx + p_2 \int_{\mathscr{X} \setminus \mathscr{D}_{\mathscr{X}}{}^{(2)}} f_2(x)\, dx && (14)\\
&= \int_{\mathscr{X}} f(x) - p_1 \int_{\mathscr{D}_{\mathscr{X}}{}^{(1)}} f_1(x)\, dx - p_2 \int_{\mathscr{D}_{\mathscr{X}}{}^{(2)}} f_2(x)\, dx && (15)\\
&= 1 - P_c[\Psi] && (16)\\
&= P_e[\Psi]. && (17)
\end{aligned}$$

5. Algorytm bayesowski

Algorytm bayesowski Ψ^* (optymalny) minimalizuje ryzyko średnie

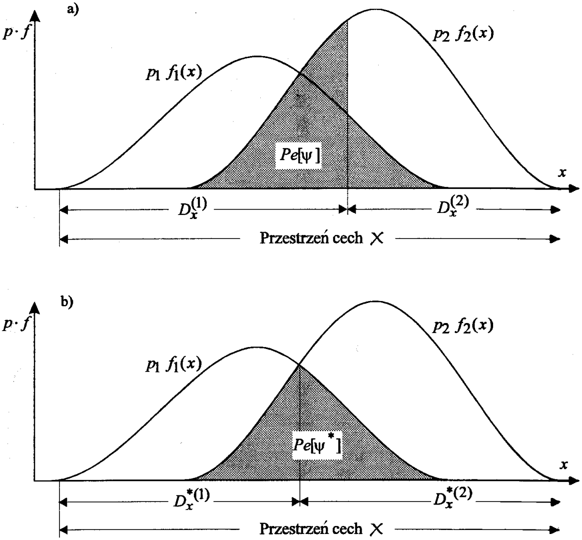
$$\mathscr{R}[\Psi^*] \quad = \quad \min_{\Psi} \mathscr{R}[\Psi]. \tag{18}$$

Dla dwóch klas oraz dla 0-1 funkcji strat minimalizacja ryzyka algorytmu Ψ^* oznacza minimalizację średniego prawdopodobieństwa błędnej klasyfikacji P_e, ponieważ

$$\mathscr{R}[\Psi^*] = P_e[\Psi^*] = p_1 \int_{\mathscr{D}_{\mathscr{X}}{}^{*(2)}} f_1(x)\,dx + p_2 \int_{\mathscr{D}_{\mathscr{X}}{}^{*(1)}} f_2(x)\,dx. \tag{19}$$

Jednocześnie warunek ten oznacza maksymalizację średniego prawdopodobieństwa poprawnej klasyfikacji P_c, ponieważ

$$\mathscr{R}[\Psi^*] = 1 - P_c[\Psi^*] = 1 - \left(p_1 \int_{\mathscr{D}_{\mathscr{X}}{}^{*(1)}} f_1(x)\,dx + p_2 \int_{\mathscr{D}_{\mathscr{X}}{}^{*(2)}} f_2(x)\,dx \right). \tag{20}$$



Rysunek 1. Prawdopodobieństwo błędnej klasyfikacji: a) dowolnego algorytmu, b) algorytmu optymalnego (bayesowskiego).

Źródło: [1]

Algorytm bayesowski sprowadza się do reguły

$$\Psi^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } p_1 f_1(x) > p_2 f_2(x), \\ 2, & \text{gdy } p_1 f_1(x) < p_2 f_2(x). \end{cases} \tag{21}$$

Z twierdzenia Bayesa prawdopodobieństwo *a posteriori* klasy $k \in \{1, 2\}$, gdy zaobserwowano x wynosi

$$P(k\,|\,x) = \frac{p_k f_k(x)}{\sum_{i \in \mathscr{M}} p_i f_i(x)} = \frac{p_k f_k(x)}{f(x)}, \tag{22}$$

gdzie

$$f(x) \quad = \quad p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x). \tag{23}$$

7. Oszacowanie ryzyka dla M klas

Dla algorytmu bayesowskiego w przypadku rozłączności nośników funkcji gęstości

$$P_e[\Psi^*] = 0\,. \tag{24}$$

W przypadku $p_1 f_1(x) = p_2 f_2(x)$ dla $M = 2$ klas

$$P_e[\Psi*] = 0.5\,. \tag{25}$$

W problemie M-klasowym zachodzi

$$0 \leq P_e[\Psi*] \leq \frac{M-1}{M}\,. \tag{26}$$

Literatura

[1] M. Kurzyński, *Rozpoznawanie obiektów. Metody statystyczne.* Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław (1997).

[2] J. Han, M. Kamber, J. Pei, *Data Mining: Concepts and Techniques*, 3rd ed., Elsevier, (2012).

Zadanie

Zad. Wyznacz punkt graniczny oraz ryzyko dla bayesowskiego algorytmu rozpoznawania obrazów, jeżeli funkcja gęstości prawdopodobieństwa cech w klasie 1 wynosi f_1, w klasie 2 - f_2, a p_1 i p_2 to prawdopodobieństwa *a priori* wystąpienia klas.

Dane:

$f_1(x) = \left(-\frac{9}{2}x + 3\right) 1\left[0, \frac{2}{3}\right]$

$f_2(x) = (2x)\, 1\,[0, 1]$

a) $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{2}$

b) $p_1 = \frac{2}{3}$, $p_2 = \frac{1}{3}$